

寻“前世今生”，觅“备考之道”

——对2018年高考全国I卷理科数学第21题的深度分析

■ 广东省信宜市信宜中学 林 生

从2010年至2018年的全国高考题来看：函数与导数这个是个高考的“重头戏”，每年的分值都比较高，几乎年年都以“压轴题”的身份出现，给人很“高深”的感觉，让人“畏惧”。其实对于函数与导数这个压轴题，我们只要多学会研究题目的“真谛”，找到解题的思路和突破口，那么我们便“无所畏惧”。其实我们高考备考过程其实就是探索、不断完善的过程。在备考过程中，我们要学会通过认真分析研究以前的高考真题，通过对真题的纵横分析以及对其内在的研究，找出其共性的东西，找出其通性通法，找到命题的趋势，再加强训练，我们便可以实现“通一明百”，从而实现高效备考。下面结合今年全国I卷理科数学高考题的第21题来分析，通过对本题的研究与分析来寻找它的“前世今生”，找到其“源”与“流”，从而找到这类导数压轴题的常规解法，同时对此基本类型进行变式拓展，让考生从题中悟“道”，从而举一反三，开启思维，纵横联系、触类旁通，另外还对函数与中常规题型及常用到的一些解题方法和技巧来进行举例分析、变式和总结归纳，让考生真正掌握处理函数与导数问题的实质，熟练运用其技巧，从而掌握这一类题型的基本方法和技巧，最终得出2019年高考函数与导数发展的趋势，探窥出函数与导数优效备考的策略。

一、真题回放

(2018年全国卷新课标I卷(即广东高考)理科数学第21题) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

【分析】本题第一问考查函数的单调区间,看起来熟悉常规,有利于思维的展开,但该题把数学思想方法(函数与方程、等价转化、分类讨论)和素养作为考查的重点,抓住了广东考生的“软肋”(字母运算和分类讨论),直击其“要害”,将字母运算、分类讨论等融为一体,是一道简约而不简单、深刻而不深奥的试题,让考生在平平淡淡中考能力、平实实中考思维、稳扎稳打中见真功,这十分符合新课标的命题理念.加上该试题第(2)问和不等式结合在一起,很多考

生由于“畏惧”的心理,加上由于时间的限制,很多考生在这里如果没有保持“清醒”的头脑的话,就会陷入“卡壳”,因此命题者把它作为压轴题也就不足为奇了.综合来看:其实本题只要认真分析,找住问题的本质,特别是本题的第(1)问,应该有“抢分”的意识,该问主要是考查考生分类讨论的思想,只要抓住问题的关键,求导后分子是二次函数,即 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{-x^2 + ax - 1}{x^2}$, 但在这里考生很容易出错的是:

①会忽略函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 这会使学生容易出错; ②求导容易求错, 会出现 $f'(x) = \ln x - 1 + \frac{a}{x}$ 或 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - 1 +$

$\frac{a}{x} = \frac{-x^2 + ax - 1}{x^2}$ 的错误; 以上两种都是由于粗心或者不小心导致出错.但只要我们注意定义域和求导不求错,对求导后的分类讨论标准(分类讨论的思想方法:就是当问题所给的对象不能进行统一研究时,就需要对研究对象按某个标准分类,然后对每一类分别研究得出第一类的结论,最后综合各类结果得到整个问题的解答,其实质是“化整为零,各个击破,再积零为整”.在分类讨论时,要注意:①分类对象确定,标准统一;②不重复,不遗漏;③分层次,不越级讨论.)把握到位,第(1)问就可以“迎难而上”,即求导 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 +$

$\frac{a}{x} = \frac{-x^2 + ax - 1}{x^2}$ 可知不用再讨论分母,只需判断分子的情况即可,而分子是 $-x^2 + ax - 1$, 是典型的二次函数,因此可设 $g(x) = -x^2 + ax - 1$, 只需判断 $g(x) = -x^2 + ax - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上的根的情况即可.而对于函数 $g(x) = -x^2 + ax - 1$ 的图像开口向下,又恒过定点 $(0, -1)$, 所以这时问题变得很简单了,只需判断 $\Delta = a^2 - 4$ 的情况.即只需研究 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ 和 $\Delta = a^2 - 4 > 0$ 两种情况,懂得这样分类讨论的话,一切问题都变得简单很多了.而对于第(2)问涉及到证明不等式的问题,其实常规的方法无非是两种处理方法:①构造一个新的函数来处理;②将问题进行转化,转化为可以用我们所学的知识来处理.但不管用上面的哪种方法来处理,都少不了将条件“函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ”具体化,并且要学会找出隐含在里面的条件“ $x_1 x_2 = 1$ ”,只有懂得把这些隐含条件找出来,才可以更好地出来该类题型.这